第一章 習題

1.1 已知下列點座標：

A(1，2，3)、B(–5，3，1)、C(2，x，6)、D(2，–2，3)、E(y，1，7)。

(a) 求向量 $\vec{A}$ 的單位向量 $\hat{A}$ 。

(b) 若向量 $\vec{V}=\overrightarrow{AB}$ ，求 $\vec{V}$ 與 $\hat{V}$ 。

(c) 若向量 $\vec{A}$ 與向量 $\vec{C}$ 平行，求 x 的值。

(d) 若向量 $\vec{B}$ 與向量 $\vec{E}$ 垂直，求 y 的值。

(e) 求 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 的內積與夾角。

(f) 設 $\vec{W}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ ，求 $\vec{W}$ 與 $\hat{W}$ 。

(g) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所圍成平行四邊形的面積。

(h) 求 $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 與 $\vec{D}$ 所圍成平行六面體的體積。

(i) 求 $\vec{C}$ 、 $\vec{D}$ 與 $\vec{E}$ 所圍成三角錐體的體積。

(j) 求 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AD}$ 上的投影量。[註：借用(e)的結果]

(k) 利用已知外積的結果求 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 間的夾角並與(e)的結果比較。

【解】(a) 原點(0，0，0)為起點、A(1，2，3)為終點，則

$$\vec{A}=\hat{x}+2\hat{y}+3\hat{z}\ ,\ \left|\vec{A}\right|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$$

$$\hat{A}=\frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}=\frac{\hat{x}+2\hat{y}+3\hat{z}}{\sqrt{14}}=0.2673\hat{x}+0.5345\hat{y}+0.8018\hat{z}$$

驗證：$\left|\hat{A}\right|=0.2673^2+0.5345^2+0.8018^2=0.0714+0.2857+0.6429=1$

(b) 起點為 A(1，2，3)、終點為 B(–5，3，1)，則

$$\vec{V}=(-5-1)\hat{x}+(3-2)\hat{y}+(1-3)\hat{z}=-6\hat{x}+\hat{y}+-2\hat{z}$$

$$\left|\vec{V}\right|=\sqrt{(-6)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{41}$$

$$\hat{V}=\frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|}=\frac{-6\hat{x}+\hat{y}-2\hat{z}}{\sqrt{41}}=-\frac{6}{\sqrt{41}}\hat{x}+\frac{1}{\sqrt{41}}\hat{y}-\frac{2}{\sqrt{41}}\hat{z}$$

(c) $\vec{A}=\hat{x}+2\hat{y}+3\hat{z}$ 且 $\vec{C}=(2)\hat{x}+(x)\hat{y}+(6)\hat{z}$

若 $\vec{A}$ 與 $\vec{C}$ 平行，則 $\frac{A_x}{C_x}=\frac{A_y}{C_y}=\frac{A_z}{C_z}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{x}=\frac{3}{6}\Rightarrow x=4$

(d) $\vec{B}=-5\hat{x}+3\hat{y}+\hat{z}$ 且 $\vec{E}=y\hat{x}+\hat{y}+7\hat{z}$

若 $\vec{B}$ 與 $\vec{E}$ 垂直，則 $\vec{B}\perp\vec{E}\Rightarrow B_xE_x+B_yE_y+B_zE_z=0$

$\Rightarrow(-5)(y)+(3)(1)+(1)(7)=0\Rightarrow y=2$

(e) $\overrightarrow{AB}=-6\hat{x}+\hat{y}-2\hat{z}$ 且 $\overrightarrow{AD}=\hat{x}-4\hat{y}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(-6)(1)+(1)(-4)+(-2)(0)=-10$ (夾角大於 90^o)

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-6)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{41}$

$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(1)^2+(-4)^2+(0)^2}=\sqrt{17}$

利用夾角公式 $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-10}{\sqrt{41}\sqrt{17}}\right)\approx112.26^o$

(f) $\vec{W}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\-6&1&-2\\1&-4&0\end{vmatrix}$

$=\hat{x}[(1)(0)-(-2)(-4)]+\hat{y}[(-2)(1)-(-6)(0)]+\hat{z}[(-6)(-4)-(1)(1)]$

$\vec{W}=-8\hat{x}-2\hat{y}+23\hat{z}$

$\hat{W}=\frac{\vec{W}}{\left|\vec{W}\right|}=\frac{-8\hat{x}-2\hat{y}+23\hat{z}}{\sqrt{64+4+529}}=\frac{-8\hat{x}-2\hat{y}+23\hat{z}}{\sqrt{597}}$

(g) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所圍成平行四邊形的面積 $=\left|\vec{W}\right|=\sqrt{597}\approx24.43$

(h) $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 與 $\vec{D}$ 所圍成平行六面體的體積 $=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{D})$

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{D})=\begin{vmatrix}1&2&3\\-5&3&1\\2&-2&3\end{vmatrix}$

= (1)(3)(3) + (2)(1)(2) + (3)(-5)(-2) - (3)(3)(2) - (2)(-5)(3) - (1)(1)(-2)

= 57

(i) $\vec{C}$ 、 $\vec{D}$ 與 $\vec{E}$ 所圍成三角錐體的體積 $= \frac{1}{6}\vec{C}\cdot(\vec{D}\times\vec{E}) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{6}[-28+24+12-(-24)-56-6] = \frac{60-90}{6} = -5$$

三角錐體的體積為 5(嚴格地講，面積或體積的計算結果不應該為負，負號是因為兩向量外積結果的面向，不是面積或體積為負)。

(j) 由(e)得知 $\theta \approx 112.26^o$， $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AD}$ 上的投影量為

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\theta = \sqrt{41}\cos 122.26^o \approx -2.43$$

(k) 由(f)與(g)得知 $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{597}$

利用外積與夾角的公式 $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\sin\theta$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{597}}{\sqrt{41}\sqrt{17}}\right) \approx 67.74^o$$

參考圖 P1.1.k，本題的結果為銳角(< 90^o)而(e)的結果為鈍角(> 90^o)，

答案互為補角；因為反正弦函數($\sin^{-1}$)在 0^o ~ 180^o 均為正值，因此利用外積與夾角的公式求夾角時，對鈍角的辨別度為零。因此，儘量利用內積與夾角的公式求夾角。

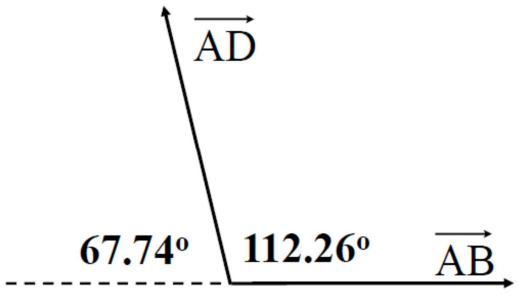


圖 P1.1.k

1.2 已知 $\vec{A} = 2\hat{x}+\hat{y}$ 、 $\vec{B} = \hat{x}-3\hat{z}$ 、 $\vec{C} = 3\hat{x}-6\hat{y}+\hat{z}$ 及 $\vec{D} = 2\hat{y}+\hat{z}$ ，試證明

(a) $\vec{C}$ 分別垂直於 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 。

(b) $\vec{C}$ 平行於 $\vec{A}\times\vec{B}$ 。

計算並比較(c)與(d)

(c) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{D}$ 。

(d) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{D})$。

【解】(a) 若$\vec{C}$垂直於$\vec{A}$，則$\vec{C} \cdot \vec{A} = 0$

$\vec{C} \cdot \vec{A} = (3)(2) + (-6)(1) + (1)(0) = 0$，得證；

若$\vec{C}$垂直於$\vec{B}$，則$\vec{C} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{C} \cdot \vec{B} = (3)(1) + (-6)(0) + (1)(-3) = 0$，得證。

(b) $$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \hat{x}[(-3) - (0)] + \hat{y}[(0) - (-6)] + \hat{z}[(0) - (1)]$$

$$= -3\hat{x} + 6\hat{y} - \hat{z}$$

若$\vec{C}$平行於$\vec{A} \times \vec{B}$，則$\dfrac{(\vec{A} \times \vec{B})_x}{C_x} = \dfrac{(\vec{A} \times \vec{B})_y}{C_y} = \dfrac{(\vec{A} \times \vec{B})_z}{C_z}$

$\dfrac{-3}{3} = \dfrac{6}{-6} = \dfrac{-1}{1} = -1$，得證。

1.3 在球座標系中，利用球面上任一微面積公式$d\vec{s} = \pm \hat{r}\, r^2 \mathrm{Sin}\theta\, d\theta\, d\phi$，求半徑為 R 的球面表面積。

【解】依題意球座標系的徑向距離 r = R、天頂角 $0 \le \theta \le \pi$、方位角 $0 \le \phi \le 2\pi$

$$r^2 \big|_{r=R} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \left(R^2\right)\left(\phi\right)_0^{2\pi}\left(-\cos\theta\right)_0^{\pi} = 4\pi R^2$$

半徑為 R 的球面表面積為$4\pi R^2$。

1.4 在球座標系中，利用球體微體積公式 $dv = r^2\, \mathrm{Sin}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$，求半徑為 R 的球體體積。

【解】同上題，徑向距離 $0 \le r \le R$、餘相同，則

$$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} r^2 dr = \left(\phi\right)_0^{2\pi}\left(-\cos\theta\right)_0^{\pi}\left(\frac{r^3}{3}\right)_0^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

半徑為 R 的球體體積為$\dfrac{4}{3}\pi R^3$。

1.5 承 1.4 題，求部份球殼體積，球殼定義為 $2 \le r \le 5$、$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$、$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$。

【解】借用 1.4 題的積分並代入變數範圍得

$$\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_2^5 r^2 dr = (\phi)_0^{\pi/2} (-\cos\theta)_0^{\pi/2} \left(\frac{r^3}{3}\right)_2^5$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)(0-(-1))\left(\frac{1}{3}(5^3-2^3)\right) = 18.5\pi \approx 61.26$$

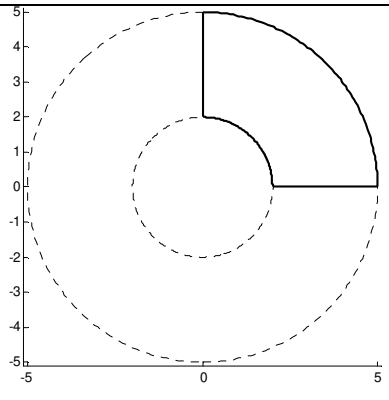
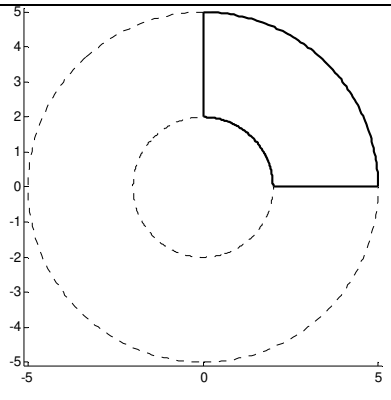
1.6 承 1.5 題，若球殼定義為 $2 \le r \le 5$、$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$、$\frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{3\pi}{4}$，求其體積並比較結果。

【解】借用 1.4 題的積分並代入變數範圍得

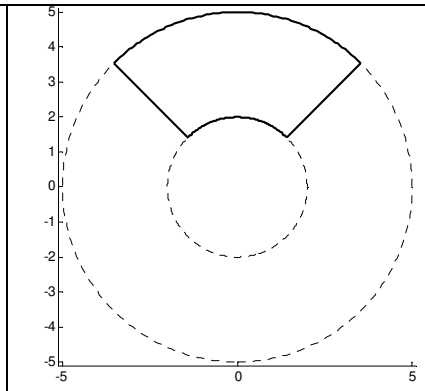
$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_2^5 r^2 dr = \left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\left(-\cos(\pi)-[-\cos(\frac{\pi}{2})]\right)\left(\frac{5^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)$$

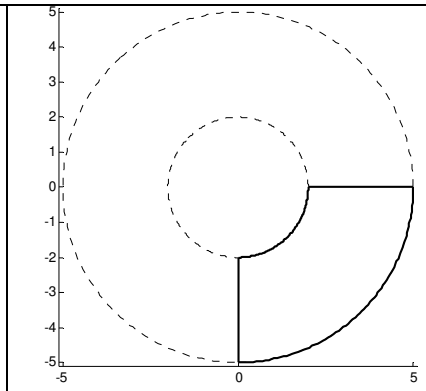
$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)(-(-1)-[0])\left(\frac{5^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right) = 18.5\pi$$

與上題的結果一致。都是球殼八分之一，位置不一樣。以時鐘為方位工具，1.5 題為 12 ~ 3 上半球的八分之一；1.6 題則為 10.5 ~ 13.5 下半球的八分之一，如下圖所示。

	俯視圖	側視圖
1.5 題		

1.6 題





1.7 在圓柱座標系中，利用圓柱側面上任一微面積公式 $d\vec{s} = \pm \hat{r}\, r\, d\phi\, dz$，求圓柱側面的面積。假設 $r = 1$ m、$0 \le z \le 3$、$0^o \le \phi \le 360^o$。

【解】依題意球座標系的徑向距離 $r = 1$、方位角 $0 \le \phi \le 2\pi$、高度 $0 \le z \le 3$

$$(r = 1)\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 dz = (1)(2\pi - 0)(3 - 0) = 6\pi \approx 18.85\ m^2$$

1.8 承 1.7 題，若圓柱側面定義為 $r = 3$ m、$25^o \le \phi \le 115^o$、$1 \le z \le 6$，求其面積。

【解】代入變數範圍得

$$(r = 3)\int_{25^o}^{115^o} d\phi \int_1^6 dz = (3)(115 - 25)\frac{\pi}{180}(6 - 1) = 7.5\pi \approx 23.56\ m^2$$

1.9 在球座標系中一點(5，45^o，45^o)，請轉換算出直角座標系的座標值。

【解】依題意球座標系的 $r = 5$、$\theta = 45^o = \pi/4$、$\phi = 45^o = \pi/4$

$$x = r\cos\theta\cos\phi = 5\cos(45^o)\cos(45^o) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2.5$$

$$y = r\cos\theta\sin\phi = 5\cos(45^o)\sin(45^o) = 2.5$$

$$z = r\sin\theta = 5\sin(45^o) = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3.54$$

1.10 已知 $\vec{F} = 3y^2\,\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{4}x)\hat{x}$，求 $\vec{F}$ 的散度及在(1，1，1)處的散度值。

【解】$\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[3y^2\cos(\frac{\pi}{4}x)\right] = 3y^2\left[-\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4}x)\right]$

代入 x = 1、y = 1、z = 1 得

$$\nabla\cdot\vec{F}_{(1,1,1)}=3(1)^2\left[-\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4}(1))\right]=-\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$$

1.11 若$\vec{F}=3x^2\,\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{4}x)\hat{x}$，求$\vec{F}$的散度及在(1，1，1)處的散度值。

【解】$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left[3x^2\cos(\frac{\pi}{4}x)\right]=\left[6x\cos(\frac{\pi}{4}x)\right]+3x^2\left[-\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4}x)\right]$

代入 x = 1、y = 1、z = 1 得

$$\nabla\cdot\vec{F}_{(1,1,1)}=\left[6(1)\cos(\frac{\pi}{4})\right]-3(1)^2\left[-\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4})\right]=\frac{24-3\pi}{4\sqrt{2}}$$

1.12 已知$\vec{A}=\frac{3}{r^2}\mathrm{Sin}\theta\,\hat{r}+\frac{r}{\mathrm{Sin}\theta}\hat{\theta}+r\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\,\hat{\phi}$，求$\nabla\cdot\vec{A}$。

【解】球座標系：$\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{3}{r^2}\sin\theta\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{\sin\theta}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(r\sin\theta\cos\phi\right)$$

$$=-2\cdot\frac{3}{r^3}\sin\theta+\frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{-r\sin\theta\sin\phi}{r\sin\theta}=-\frac{6}{r^3}\sin\theta-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}-\sin\phi$$

1.13 已知$\vec{A}=r\,\mathrm{Cos}\phi\,\hat{r}+r^3\,\mathrm{Sin}\phi\hat{\phi}+5re^{-3z}\,\hat{z}$，求$\nabla\cdot\vec{A}$。

【解】圓柱座標系：$\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos\phi\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(r^3\sin\phi\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(5r\,e^{-3z}\right)$$

$$=\cos\phi+r^2\cos\phi+(-3)\left(5re^{-3z}\right)=\cos\phi+r^2\cos\phi-15re^{-3z}$$

1.14 已知$\vec{S}=\sqrt{x^2+y^2}\,\hat{x}$，求$\nabla\cdot\vec{S}$。

【解】直角座標系：$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

$$\nabla\cdot\vec{S}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2x)$$

$$=-x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{-x}{\sqrt{x^3+y^3}}$$

1.15 已知 $\vec{A}=25\,e^{-2r}\,\hat{r}-3\,z\,\hat{z}$，若圓柱定義為 $r=2.5$、$1\le z\le 6$，試證明散度定理。

【解】圓柱座標系散度：$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

(側面) $d\vec{s}=\hat{r}\,r\,d\phi\,dz$; (蓋/底面) $d\vec{s}=\pm\hat{z}\,r\,dr\,d\phi$; (體積)$dv=r\,dr\,d\phi\,dz$

$A_r=25e^{-2r}$、$A_\phi=0$、$A_z=-3z$

$\vec{A}$ 的散度為 $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial}{r\partial r}\left(25re^{-2r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}(-3z)=-50e^{-2r}+\frac{25e^{-2r}}{r}-3$

$\vec{A}$ 的散度的體積積分為

$$\int_v\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)(r\,dr\,d\phi\,dz)=-\int_0^{2.5}(50re^{-2r}-25e^{-2r}+3r)dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_1^6 dz$$

$$=\left[25re^{-2r}-\frac{3}{2}r^2\right]_0^{2.5}(2\pi)(6-1)$$

$$=-89.54\,\pi$$

$\vec{A}$ 的面積積分為

$$\int_s\vec{A}\cdot d\vec{s}=\int_s\left(25e^{-2r}\hat{r}\right)\cdot\left(r\,d\phi\,dz\,\hat{r}\right)+\int_s\left(-3z\,\hat{z}\right)\cdot\left(\pm r\,dr\,d\phi\,\hat{z}\right)$$

$$=\left(25re^{-2r}\right)_{r=2.5}\int_0^{2\pi}d\phi\int_1^6 dz-3\left[(z)_{z=6}-(z)_{z=1}\right]\int_0^{2.5}rdr\int_0^{2\pi}d\phi$$

(側面) (上蓋) (下底)

$=4.21\,\pi-93.75\,\pi$

$=-89.54\,\pi$

1.16 已知 $\vec{D}=3r^2\,\hat{r}$，若球體定義為 $1\le r\le 2$，試證明散度定理。

【解】球座標系散度：$\nabla\cdot\vec{D}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2D_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_\theta\sin\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}$

$D_r=3r^2$、$D_\phi=D_z=0$

(內/外面積) $d\vec{s} = \pm \hat{r}\,(r\,d\theta)(r\,\sin\theta d\phi)$; (體積) $dv = r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

$\vec{D}$ 的散度為 $\nabla\cdot\vec{D} = \dfrac{\partial}{r^2\partial r}\left(r^2\cdot 3r^2\right) = 12r$

$\vec{D}$ 的散度的體積積分為

$$\int_v \left(\nabla\cdot\vec{D}\right)(r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi) = \int_1^2 (12r^3)dr \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \left(3r^4\right)_1^2 (4\pi)$$

$$= 180\,\pi$$

$\vec{D}$ 的面積積分為

$$\int_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_s \left(3r^2\,\hat{r}\right)\cdot\left(\pm r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{r}\right) = \left[\left(3r^4\right)_{r=2} - \left(3r^4\right)_{r=1}\right](4\pi)$$

$$= 180\,\pi$$

1.17 已知電通密度在 $r \le 2$ 區域為 $\vec{D} = (2r - r^3)\,\hat{r}$ 且在 $r > 2$ 區域為 $\vec{D} = 3r^{-2}\,\hat{r}$ ，求兩區域中的電荷。

【解】球座標系散度：$\nabla\cdot\vec{D} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(D_\theta\sin\theta\right) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial D_\phi}{\partial\phi}$

$dv = r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

(a) $r \le 2$ ， $\nabla\cdot\vec{D} = \dfrac{\partial}{r^2\partial r} r^2(2r - r^3) = 6 - 5r^2$

$$Q_a = \int_v \left(\nabla\cdot\vec{D}\right)dv = \int_0^2 \left(6 - 5r^2\right)r^2 dr \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \left(\frac{6}{3}r^3 - \frac{5}{5}r^5\right)_0^2 (4\pi) = -64\,\pi$$

(b) $r > 2$ ， $\nabla\cdot\vec{D} = \dfrac{\partial}{r^2\partial r}\left[r^2(3r^{-2})\right] = 0$

$$Q_b = 0$$

1.18 已知 $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，求 ∇f 。

【解】直角座標系： $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\sqrt{x^2+y^2} = \hat{x}\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}$$

$$= \hat{x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \hat{y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

1.19 已知平面 P = x + 2y + 3z – 6，求平面的法線向量。

【解】平面 P 的法線向量就是∇P

$$\nabla P = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)(x + 2y + 3z - 6) = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$$

1.20 已知 $\vec{A} = \cos(ay)\,\hat{x} + z^2\,\hat{y} + e^{-x}\,\hat{z}$ ，求 $\nabla \times \vec{A}$ 。

【解】直角座標系：$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

$A_x = \cos(ay)$、$A_y = z^2$、$A_z = e^{-x}$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos(ay) & z^2 & e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}\left[\frac{\partial e^{-x}}{\partial y} - \frac{\partial z^2}{\partial z}\right] + \hat{y}\left[\frac{\partial \cos(ay)}{\partial z} - \frac{\partial e^{-x}}{\partial x}\right] + \hat{z}\left[\frac{\partial z^2}{\partial x} - \frac{\partial \cos(ay)}{\partial y}\right]$$

$$= -z\,\hat{x} + e^{-x}\,\hat{y} + a\sin(ay)\hat{z}$$

1.21 已知 $\vec{A} = e^{-r}\,\mathrm{Sin}\,\phi\,\hat{z}$ ，求 $\nabla \times \vec{A}$ 。

【解】圓柱座標系：$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix}$

$A_r = 0$、$A_\phi = 0$、$A_z = e^{-r}\sin\phi$

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & e^{-r}\sin\phi\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r}\left\{\hat{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial e^{-r}\sin\phi}{\partial\phi}\right]+r\hat{\phi}\left[-\frac{\partial e^{-r}\sin\phi}{\partial r}\right]+\hat{z}[0-0]\right\}$$

$$=\hat{r}\frac{e^{-r}}{r^2}\cos\phi+\hat{\phi}\,e^{-r}\sin\phi$$

1.22 已知 $\vec{A}=\pi\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\hat{\theta}$ ，求 $\nabla\times\vec{A}$ 。

【解】球座標系：$\nabla\times\vec{A}=\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi\end{vmatrix}$

$A_r=0$、$A_\theta=\pi\sin\theta$、$A_\phi=0$

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ 0 & r\pi\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\hat{r}(0)+r\,\hat{\theta}(0)-r\sin\theta\,\hat{\phi}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\pi\sin\theta)\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{r}\sin\theta\hat{\phi}$$

1.23 已知 $\vec{A}=\cos(x)\sin(y)\,\hat{z}$ ，求 $\nabla\times\vec{A}$ 。

【解】直角座標系：$A_x=0$、$A_y=0$、$A_z=\cos(x)\sin(y)$

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \cos(x)\sin(y)\end{vmatrix}$$

$$=\hat{x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\big(\cos(x)\sin(y)\big)-0\right]+\hat{y}\left[0-\frac{\partial}{\partial x}\big(\cos(x)\sin(y)\big)\right]+\hat{z}[0-0]$$

$$=\hat{x}\cos(x)\cos(y)+\hat{y}\sin(x)\sin(y)$$

1.24 已知 $\vec{A}=\cos(x)\sin(y)\,\hat{x}+\sin(x)\cos(y)\,\hat{y}$ ，求 $\nabla\times\vec{A}$ 。

【解】直角座標系：$A_x=\cos(x)\sin(y)$ 、$A_y=\sin(x)\cos(y)$ 、$A_z=0$

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \cos(x)\sin(y) & \sin(x)\cos(y) & 0\end{vmatrix}$$

$$=\hat{x}[0-0]+\hat{y}[0-0]+\hat{z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(\sin(x)\cos(y)\big)-\frac{\partial}{\partial y}\big(\cos(x)\sin(y)\big)\right]$$

$$=\hat{z}[\cos(x)\cos(y)-\cos(x)\cos(y)]=0$$

因為 $\nabla\times\vec{A}=0$ ，所以 $\vec{A}$ 為保守場。

1.25 已知 $\vec{A}=\nabla f$ ，試證 $\nabla\times\vec{A}=0$ 。

【解】直角座標系：$\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\dfrac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\dfrac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

$$\vec{A}=\nabla f=\hat{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}=\hat{x}f_x+\hat{y}f_y+\hat{z}f_z$$

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f_x & f_y & f_z\end{vmatrix}$$

$$=\hat{x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right]+\hat{y}\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right]+\hat{z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right]$$

因為 $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}$

同理 $\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial z}$ 、$\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}$

所以 $\nabla\times\vec{A}=\nabla\times(\nabla f)=0$

也就是梯度不具旋度。